JOAN MARIA ESTEBAN MARQUILLAS*

Algunos resultados sobre la curva de Lorenz y el coeficiente de Gini**

El interés por el estudio de la desigualdad parece haberse redoblado en el transcurso de la presente década. Aparte de los esfuerzos empíricos, los aspectos teóricos de la medición de la desigualdad han sufrido una profunda transformación. El principal elemento renovador ha sido el intento de incorporar explícitamente los juicios de valor que necesariamente contiene toda medida de desigualdad. A pesar de que estos nuevos puntos de vista son incorporados en el presente trabajo, su objetivo no es el de establecer un balance de las contribuciones recientes en este campo. Nuestro objetivo es presentar algunos nuevos resultados con una intencionalidad eminentemente empírica.

Dentro del área de la medición de la desigualdad, tanto la curva de Lorenz como el coeficiente de Gini han venido gozando de gran aceptación. En efecto, el diagrama de Lorenz es todavía la mejor representación gráfica de la dispersión de las rentas individuales y el coeficiente de Gini, a pesar de las críticas recientes, sigue siendo quizás el más popular de los índices de desigualdad. En este sentido, los resultados que se presentan en este trabajo creemos que son de algún interés para el análisis aplicado de la distribución de la renta.

El artículo se divide en tres secciones. En la primera sección se examina la relación entre las funciones de distribución y sus correspondientes curvas de Lorenz. Se pasa revista a las principales propiedades de la curva de Lorenz y se concluye la sección demostrando que algunas características, tales como la simetría y la isoelasticidad, son transmitidas de las funciones de distribución a las curvas de Lorenz. La se-

* Departament de Teoria Econòmica. Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra, Barcelona.

** Agradezco las sugerencias de S. Barberá, J.L. Gastwirth y N. Stern. La responsabilidad por los errores es del autor. Este trabajo forma parte de una investigación financiada por el Instituto de Estudios Fiscales.

gunda sección está integramente dedicada al coeficiente de Gini. Después de establecer la equivalencia entre diversas formas de definir dicho coeficiente, se estudia la posibilidad de acotar su valor cuando la información disponible es escasa. A este respecto, se demuestra que conociendo el recorrido y la Diferencia Media Relativa puede establecerse una cota superior y una inferior con un recorrido máximo de 0,25 entre ambas. Por último, se presentan las críticas recientes al índice de Gini y se propone una reformulación que permite superarlas. La tercera sección está dedicada a la comparación de curvas de Lorenz. Se define el criterio de "dominación" y se ofrece su interpretación en términos de bienestar social. Por último, se estudia cómo determinar si dos curvas de Lorenz se cortan o no, y se presenta un resultado en el que se muestra que mediante la comparación de algunos índices de dispersión es posible establercer que dos curvas se cortan.

1. DEFINICION Y PROPIEDADES GENERALES DE LA CURVA DE LORENZ

La curva de Lorenz es una representación gráfica, introducida por Lorenz (1905), que pretende subrayar la dispersión asociada con la distribución de una variable (la renta, por ejemplo). La curva de Lorenz se define como el lugar geométrico de los puntos que relacionan el p-ésimo cuantil de la población con la participación de la renta de este grupo sobre la renta total. Estos puntos dan lugar (para distribuciones contínuas) a una curva que puede ser representada en un cuadrado 1 x 1 y que pasa por los puntos (0,0) y (1,1). Por definición, esta curva no puede pasar por encima de la diagonal que une estos dos puntos extremos (Figura 1).

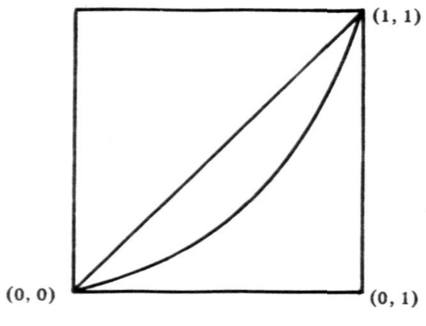

Fig. 1

En el presente trabajo nos referiremos tan sólo a funciones de distribución que sean contínuas y diferenciables en el segmento [a, b]. Así, la p-ésima cuantila formada por indivíduos con renta y, $a \leqslant y \leqslant x$, es

$$p = F(x) \tag{1}$$

Puesto que F(x) es diferenciable,

$$dp = dF(x) = f(x)\,dx$$

y, por lo tanto,

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$$

La renta media m será

$$m = \int_a^b x\,f(x)\,dx$$

Denominamos L(x) a la proporción de la renta total en manos de los indivíduos con renta no superior a x, esto es,

$$L(x) = \frac{1}{m}\int_a^x y\,f(y)\,dy = \frac{F_1(x)}{m} \tag{2}$$

La curva de Lorenz queda, pues, definida por (1) y (2). Gastworth (1971) ha propuesto la siguiente definición general para la curva de Lorenz. Puesto que F(x) es monótona creciente, la función inversa existe, esto es,

$$x = F^{-1}(p)$$

Por lo tanto, podemos reescribir la función de la curva de Lorenz en forma compacta,

$$L(p) = \frac{1}{m}\int_0^P F^{-1}(t)\,dt \tag{3}$$

Es inmediato que $L(0) = 0$ y que $L(1) = 1$.

La diagonal es denominada habitualmente la "línea de igualdad", ya que coincidiría con la curva de Lorenz correspondiente a la distribución igualitaria de la renta. La línea de igualdad se define, pues,

$$L(p) = p$$

Hablando de forma imprecisa, podemos decir que cuanto más cerca está $L(p)$ de la línea de igualdad, mejor distribuida está la renta. De hecho, gran parte de la investigación en este área está actualmente concentrada en definir de modo preciso qué entendemos por "más cerca" y "mejor". Estas cuestiones serán examinadas en las secciones siguientes.

Sea $L_F(p)$ la curva de Lorenz asociada con la función de distribución $F(x)$, cuya media es m_F. Consideremos ahora la variable $x = kx$. Tenemos que

$$p = F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \int_{ka}^z \frac{1}{k} f(y/k)\,dy = \int_{ka}^z h(y)\,dy = H(z)$$

Por lo tanto,

$$H^{-1}(p) = kx = kF^{-1}(p)$$

$$m_H = E(kx) = km_F$$

La curva de Lorenz correspondiente a $H(x)$ será

$$L_H(p) = \frac{1}{m_H} \int_0^P H^{-1}(t)\,dt = \frac{1}{km_F} \int_0^P kF^{-1}(t)\,dt = L_F(p)$$

De ahí deducimos la siguiente propiedad.

Lemma 1.– (Fellman (1976), Lemma 2) La curva de Lorenz es invariante a transformaciones de escala en la variable bajo consideración.

La implicación de esta propiedad es que, por lo que se refiere a la curva de Lorenz, podemos restringir el análisis a la clase de funciones de distribución con la misma renta media. Es más, a la vista de la definición (3) es inmediato que existe una correspondencia biunívoca entre funciones de distribución (con la misma renta media) y curvas de Lorenz, esto es,

$$L_F(p) = L_H(p), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1,$$

si y sólo si

$$F(x) = H(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad y \qquad m_F = m_H$$

En consecuencia, toda la información contenida en las funciones de distribución y que es invariante a transformaciones de escala se transmite a las curvas de Lorenz.

Pasemos ahora a examinar algunas propiedades concernientes a la convexidad de la curva de Lorenz.

Lemma 2.– (Gastwirth (1972) Lemma 1) Sea $L(p)$ la curva de Lorenz correspondiente a la función de distribución $F(x)$. Entonces, $L(p)$ es convexa respecto al origen.

En efecto, diferenciando (3) con respecto a p obtenemos

$$\frac{dL(p)}{dp} = \frac{F^{-1}(p)}{m} > 0 \tag{4}$$

y también,

$$\frac{d^2L(p)}{dp^2} = \frac{1}{mf(F^{-1}(p))} > 0 \tag{5}$$

La expresión (4) permite introducir una nueva propiedad.

Lemma 3.– (Gastwirth (1972), Lemma 1) Sea $L(p)$ la curva de Lorenz asociada con la función de distribución $F(x)$. Entonces, existe p_m, $0 < p_m < 1$, tal que

$$\text{i)}\quad \left.\frac{dL(p)}{dp}\right|_{p=p_m} = 1;$$

$$\text{ii)}\quad p_m = F(m)$$

En consecuencia, en el punto p_m la tangente a la curva de Lorenz es paralela a la línea de igualdad.

Consideremos la distancia mínima entre cada punto de la curva de Lorenz (p, L) y la línea de igualdad. Esta distancia mínima será la longitud del segmento perpendicular a la línea de igualdad que une dicha recta con cada punto de la curva de Lorenz. Denominemos $d(p)$ a esta distancia mínima.

Debido a su convexidad (Proposición 2) la curva de Lorenz pasa siempre por encima de la línea tangente a cualquier punto de $L(p)$. Teniendo en cuenta que la tangente p_m es paralela a la línea de igualdad, podemos deducir que la distancia mínima correspondiente a p_m es máxima, esto es,

$$d_m = d(p_m) \geqslant d(p), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

Tenemos, pues, la siguiente propiedad.

Lemma 4.– La distancia mínima entre cada punto de la curva de Lorenz y la línea de igualdad es máxima para $p_m = F(m)$.

Conviene destacar aquí que d_m es la altura del mayor triángulo que se puede inscribir en la curva de Lorenz. Así mismo, d_m es la longitud de uno de los lados (el otro es $\overline{OG} = \sqrt{2}$, véase Fig. 2) del menor rectángulo que contiene la curva de Lorenz.

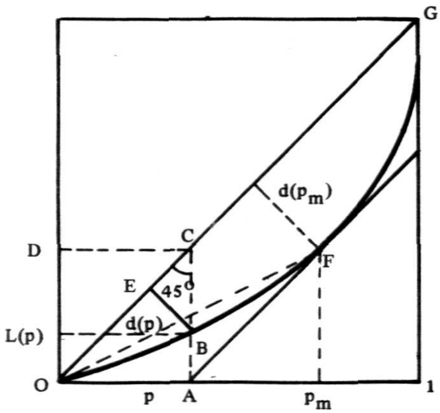

Fig. 2

Tal como podemos ver en el gráfico, $\overline{OA} = \overline{AC} = p$, y $\overline{CB} = \overline{AC} - \overline{AD} = p - L(p)$. Puesto que $\overline{EC} = \overline{EB} = d(p)$, tenemos

$$d(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} (p - L(p))$$

La distancia vertical entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad –la cual se denomina a veces "discrepancia"– puede ser expresada como

$$D(p) = p - L(p) \tag{6}$$

Esto es,

$$D(p) = \sqrt{2}\, d(p)$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente propiedad.

Lemma 5.– (Gastwirth (1972), Lemma 3) La discrepancia $D(p) = p - L(p)$, es máxima para $p_m = F(m)$.

La expresión (6) puede reescribirse como

$$D(p) = p - \frac{1}{m}\int_0^p F^{-1}(t)\, dt = \frac{pm - \int_0^p F^{-1}(t)\, dt}{m} \qquad (7)$$

Por lo tanto, $D(p)$ es también equivalente a la diferencia relativa entre la renta que estaría en manos del p-ésimo cuantil de la población si la renta estuviese distribuida igualitariamente y la renta que está efectivamente en sus manos. En otras palabras, $D(p)$ es la proporción de la renta total que habría que transferir para elevar la renta de la población del p-ésimo cuantil al nivel de la renta media. Parece natural considerar $D(p)$ una medida de desigualdad por cuantiles t, como veremos en la sección correspondiente, el coeficiente de Gini puede ser interpretado como el valor medio de esta discrepancia a nivel de cuantil.

Consideremos ahora otra propiedad referida a la relación entre curvas de Lorenz y las funciones de densidad subyacentes. Definamos la elasticidad de la curva de Lorenz como

$$\sigma = \frac{p}{L} \cdot \frac{dL}{dp} \qquad (8)$$

Supongamos que la elasticidad es constante. En este caso podemos escribir,

$$\sigma = \frac{x F(x)}{F_1(x)}$$

Diferenciando con respecto a x tenemos,

$$F(x) = (\sigma - 1)\, x f(x)$$

y diferenciando de nuevo y ordenando los términos obtenemos,

$$\eta_f = -\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \tag{9}$$

Así pues, si la elasticidad de una curva de Lorenz es constante la elasticidad de la función de densidad subyacente es también constante.[1] Es fácil comprobar que la afirmación contraria también es cierta. Esto es, la elasticidad de una curva de Lorenz asociada a una función de densidad de elasticidad constante es también constante. Por lo tanto, hemos probado la siguiente propiedad.

Proposición 1.— La condición necesaria y suficiente para que la elasticidad de una curva de Lorenz sea constante es que la elasticidad de la función de densidad asociada sea constante. Además,

$$\eta = \frac{\sigma}{\sigma - 1}$$

La interpretación diagramática de la elasticidad de la curva de Lorenz está representada en la Figura 3.

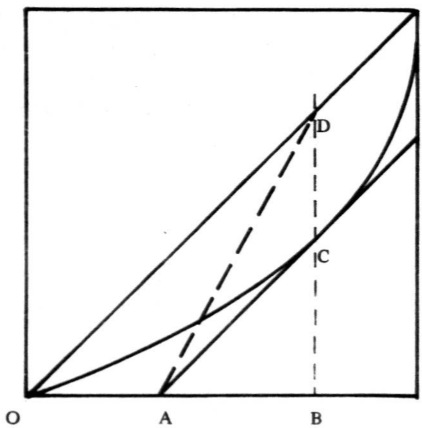

Fig. 3

1. Sobre la caracterización de funciones de densidad por su elasticidad, véase ESTEBAN (1976).

$$\sigma = \frac{p}{L}\frac{dL}{dp} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}\frac{\overline{OB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

Puesto que $\overline{OB} = \overline{DB}$, la elasticidad σ es la pendiente del segmento $\overline{AD}$.

Examinaremos ahora una propiedad referida a la simetría de las curvas de Lorenz. Concretamente, demostraremos que las curvas de Lorenz obtenidas de funciones de densidad simétricas son a su vez simétricas, y viceversa.

En general, diremos que una curva de Lorenz es simétrica si

$$D(p) = D(1-p) \quad \text{para } 0 \leqslant p \leqslant 1/2 \tag{10}$$

Teniendo en cuenta el Lemma 4, o el Lemma 5, obtenemos la siguiente propiedad para curvas de Lorenz simétricas.

Lemma 6.– Sea una curva de Lorenz simétrica, tal como se ha definido en (10). Entonces,

i) $p_m = 1/2$

ii) la media es igual a la mediana

Ambas propiedades, i) e ii) son propias de funciones de densidad simétricas; sin embargo, la plena equivalencia entre curvas de Lorenz simétricas y funciones de densidad simétricas no ha sido probada aún.

Antes de seguir adelante parece conveniente subrayar que una curva de Lorenz simétrica, tal como se ha definido en (10), no es simétrica con respecto a la diagonal perpendicular a la línea de igualdad.[2] Con el fin de interpretar gráficamente la simetría de la curva de Lorenz deberíamos dibujar la función $D(p)$ en el plano (D, p). En este caso, la curva obtenida sería simétrica con respecto a la línea $p = 1/2$. Véase Figura 4.

Redefinamos la simetría del siguiente modo,

$$D(p_m - t) = D(p_m + t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \tag{11}$$

2. Sobre este tipo de simetría, véase AITCHISON y BROWN (1954), quienes prueban que las curvas de Lorenz correspondientes a distribuciones logarítmico-normales son simétricas de este tipo.

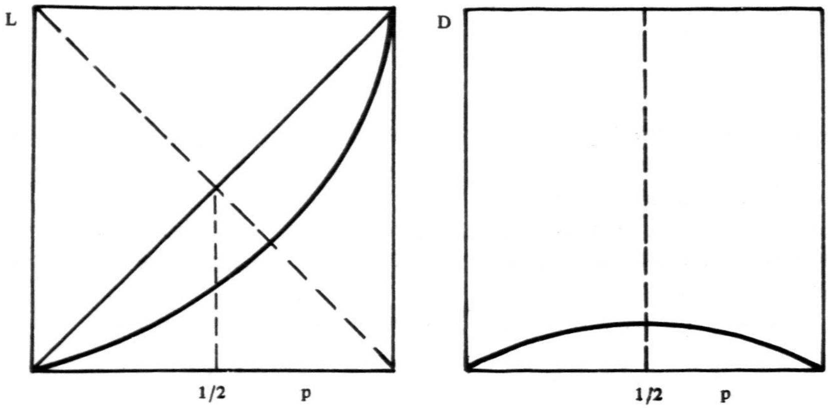

Fig. 4

Esto es,

$$p_m - t - L(p_m - t) = p_m + t - L(p_m + t),$$

es decir,

$$2t = L(p_m + t) - L(p_m - t)$$

Lo cual también puede escribirse como

$$2t = \int_{p_m - t}^{p_m + t} F^{-1}(p)\, dp$$

Puesto que tenemos la identidad

$$2t = \int_{p_m - t}^{p_m + t} F^{-1}(pm)\, dp \qquad (13)$$

podemos obtener la siguiente propiedad para curvas de Lorenz simétricas.

Lemma 7.– Sea $L(p)$ una curva de Lorenz simétrica asociada a la función de densidad $f(x)$. Entonces,

$$\int_{p_m - t}^{p_m + t} (F^{-1}(p_m) - F^{-1}(p))\, dp = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1/2$$

Volvamos a la expresión (12). Esta igualdad se cumple para todo t. Por lo tanto, diferenciando respeto a t,

$$2 = \frac{F^{-1}(p_m + t) + F^{-1}(p_m - t)}{m} \tag{14}$$

Sea $F^{-1}(p_m + t) = m + u$. Sustituyendo en (14) obtenemos que $F^{-1}(p_m - t) = m - u$. Diferenciando (14) respecto a t,

$$f(F^{-1}(p_m + t)) = f(F^{-1}(p_m - t))$$

esto es,

$$f(m + u) = f(m - u)$$

Esto prueba que la simetría en la curva de Lorenz implica simetría en la función de densidad correspondiente. Ahora podemos introducir la siguiente proposición.

Proposición 2.– Sea $L(p)$ la curva de Lorenz correspondiente a la función de densidad $f(x)$. Entonces,

i) si $L(p)$ es simétrica, también lo es $f(x)$,
ii) si $f(x)$ es simétrica, también lo es $L(p)$.

Prueba.– La parte i) de la proposición acaba de ser probada. Por lo que se refiere a la parte ii), podemos empezar por la definición de funciones de densidad simétricas,

$$f(m + u) = f(m - u)$$

Integrando con respecto a u,

$$F(m + u) + F(m - u) = q$$

donde la constante de integración, q, no depende de u. Por lo tanto, tomando $u = 0$, obtenemos que $q = 2p_m$. Así pues,

$$F(m + u) + F(m - u) = 2p_m$$

Sea $F(m + u) = p_m + t$. Es fácil obtener que $F(m - u) = p_m - t$. Utilizando la definición de simetría podemos escribir,

$$\frac{1}{f(F^{-1}(p_m + t))} - \frac{1}{f(F^{-1}(p_m - t))} = 0$$

Integrando respecto a t,

$$F^{-1}(p_m + t) + F^{-1}(p_m - t) = k$$

donde k es la constante de integración. Tomando $t = 0$, obtenemos que $k = 2m$, y por lo tanto,

$$F^{-1}(p_m + t) + F^{-1}(p_m - t) = 2m$$

Integrando de nuevo con respecto a t,

$$\int_{p_m - t}^{p_m + t} F^{-1}(p)\,dp = 2mt + v$$

Haciendo $t = 0$, obtenemos que $v = 0$. Así pues, tomando la identidad (13) y reordenando términos,

$$\int_{p_m - t}^{p_m + t} (F^{-1}(p_m) - F^{-1}(p))\,dp = 0$$

Por lo tanto, por el Lemma 7, la curva de Lorenz es simétrica, tal como queríamos probar.

Las distribuciones de renta que observamos presentan habitualmente un notable sesgo. En consecuencia, debemos esperar que las curvas de Lorenz correspondientes a distribuciones de renta no sean simétricas.

Resumiendo, hemos visto que existe una relación íntima entre curvas de Lorenz y las funciones de densidad correspondientes. En concreto, hemos obtenido que existe una relación biunívoca entre curvas de Lorenz y funciones de densidad con la misma media. Además, algunas de las propiedades de las funciones de densidad son transmitidas a las curvas de Lorenz correspondientes. Este es el caso de la simetría y de la elasticidad constante. Así mismo, hemos examinado otras propiedades conocidas referentes a la convexidad de la curva de Lorenz y a la discrepancia máxima.

2. LA CURVA DE LORENZ Y EL COEFICIENTE DE GINI

En esta sección analizaremos diversas cuestiones concernientes al coeficiente de Gini. En primer lugar, presentaremos varias formas alternativas de interpretar el coeficiente de Gini; en segundo lugar, analizaremos la posibilidad de establecer cotas al valor del coeficiente de Gini cuando tenemos información limitada sobre la distribución de la renta; por último, criticaremos el uso del índice de Gini desde el punto de vista de la Economía del Bienestar y sugeriremos una modificación que permitiría superar estas dificultades.

El coeficiente de Gini es una de las medidas de desigualdad más populares y acostumbra a definirse como el doble del área comprendida entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad, esto es,

$$G = 2 \int_0^1 (p - L(p))\, dp \tag{15}$$

Sin embargo, el coeficiente de Gini es susceptible de varias interpretaciones alternativas. Examinaremos ahora alguna de estas interpretaciones.

Utilizando la definición de discrepancia (6), podemos escribir,

$$G = 2 \int_0^1 D(p)\, dp \tag{16}$$

Por otra parte, y utilizando la definición de distancia mínima d(p), podemos escribir

$$G = 2\sqrt{2} \int_0^1 d(p)\, dp \tag{17}$$

Partiendo de (16), podemos interpretar el coeficiente de Gini como el doble del valor medio de la discrepancia –cuyo valor máximo es igual a la Desviación Media Relativa. Además, ya hemos señalado que D(p) puede ser interpretado como la proporción de la renta total que debería ser transferida a los individuos del p-ésimo cuantil para que su renta fuera igual a la renta media. En consecuencia, el coeficiente de Gini es el doble del valor medio de estas transferencias igualadoras de renta.

Si utilizamos la expresión (17), el coeficiente de Gini resulta ser proporcional a la media de la distancia mínima entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad. Definamos ahora s(p) como el área del triángulo formado por la línea de igualdad y con vértice en (L, p), esto es

$$s(p) = \frac{\sqrt{2}\ d(p)}{2}$$

Entonces,

$$G = 4 \int_0^1 s(p)\, dp \tag{18}$$

Esto es, el coeficiente de Gini es el cuádruple del valor medio del área de los triángulos inscritos con vértice en cada punto de la curva de Lorenz.

Podemos reescribir la expresión (15) como,

$$G = 2 \int_0^1 \left(p - 1/m \int_0^p F^{-1}(t)\, dt \right) dp =$$

$$= \int_0^1 2p\, dp - 2/m \int_0^1 \int_0^p F^{-1}(t)\, dt\, dp$$

Integrando por partes,

$$G = 1 - 2/m \left\{ p \int_0^p F^{-1}(t)\, dt \int_0^1 - \int_0^1 pF^{-1}(p)\, dp \right\} =$$

$$= 2/m \int_0^1 pF^{-1}(p)\, dp - 1 = 2/m \int_0^1 pF^{-1}(p)\, dp - \int_0^1 2p\, dp$$

Por lo tanto,

$$G = \int_0^1 2p\ \frac{F^{-1}(p) - m}{m}\ dp, \text{ donde } \int_0^1 2p\, dp = 1 \tag{19}$$

Por lo tanto, y basándonos en (19), podemos interpretar el coeficiente de Gini como una media ponderada de las diferencias relativas de renta. Este tipo de interpretación ha sido propuesta, entre otros, por Sen (1973) y por Mehran (1976).

Por otra parte, Kendall y Stuart (1963) –véase también Gastwirth (1972), Lemma 2– han demostrado que el coeficiente de Gini es la mitad de la Diferencia Media Relativa, esto es,

$$G = \frac{1}{2}\frac{1}{m}\int_a^b \int_a^b |x - y|\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy \tag{20}$$

Podemos presentar ahora estas definiciones equivalentes del coeficiente de Gini en la siguiente Proposición.

Proposición 3.– Sea G el coeficiente de Gini, tal como se ha definido en (15). Entonces,

i) G es el doble del valor medio de la discrepancia;
ii) G es el doble del valor medio de las transferencias igualadoras de renta;
iii) G es igual a $\sqrt{8}$ veces el valor medio de la distancia mínima;
iv) G es el cuadruplo del valor medio del área de los triángulos inscritos con vértice en cada punto de la curva de Lorenz;
v) G es la media ponderada de las diferencias relativas de renta, cuando la ponderación es 2p;
vi) G es la mitad de la Diferencia Media Relativa.

Una vez presentadas estas definiciones alternativas del coeficiente de Gini, examinaremos la posibilidad de acotar su valor. La cuestión básica es si podemos aproximar el valor de G mediante otros índices de dispersión, sin necesidad de especificar la función correspondiente a la distribución de la renta.

Consideremos el menor triángulo en el que puede inscribirse la curva de Lorenz correspondiente a la función de distribución F(x). Un lado de este triángulo es la línea de igualdad, cuya longitud es $\sqrt{2}$. Teniendo en cuenta la convexidad de la curva de Lorenz, es evidente que los otros dos lados han de ser tangentes a la curva de Lorenz en sus extremos (véase Figura 5).

Utilizando (4) obtenemos

$$L'(0) = a/m \qquad y \qquad L'(1) = b/m$$

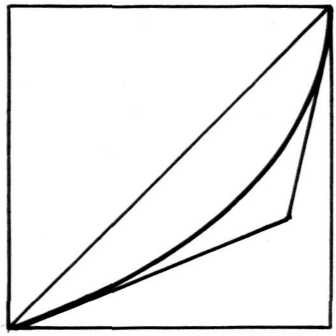

Fig. 5

Si calculamos el área del triángulo obtenemos[3]

$$S = \frac{1}{2} \frac{(b - m)(m - a)}{m(b - a)} = \frac{1}{2} R^* \qquad (21)$$

El coeficiente de Gini, G, es el doble del área entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad. Teniendo en cuenta que este área es por construcción menor que S, podemos enunciar el siguiente resultado.[4]

Lemma 8.– (Gastwirth (1972), Lemmas 4 y 5) Para toda distribución se cumple que

$$G \leqslant R^*$$

Este intersante resultado comporta la dificultad de que cuando la función de distribución está definida sobre $[0, \infty]$, $R^* = 1$.

Si queremos mejorar el resultado de Gastwirth hemos de suponer que existe más información. En particular, supondremos que conocemos la Diferencia Media Relativa, D,

$$D = \frac{1}{m} \int_a^b |x - m| \, f(x) \, dx \qquad (22)$$

3. R*puede ser considerada como una medida de desigualdad íntimamente relacionada con el Recorrido Relativo, $R = \frac{b - a}{m}$. Por otra parte, R* no sólo tiene en cuenta el recorrido de la variable, ino también la distancia entre cada extremo y la media.

4. La interpretación diagramática y el método de prueba son originales.

Es sabido –por ejemplo, Kondor (1971) y Gastwirth (1972)– que D es igual al doble del área del mayor triángulo inscribible entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad. De hecho, este triángulo puede ser interpretado como la curva de Lorenz correspondiente a la mejor distribución posible, dado un valor de D. En efecto, correspondería al caso en el que todos los individuos por debajo de la media tuviesen la misma renta y todos los que están por encima de la media hubiesen igualado sus rentas, también. Por lo tanto, D es el límite del valor de G cuando se procede a igualar las rentas en el seno de cada uno de estos dos grupos de individuos, manteniendo constante el valor de D. En consecuencia, para cualquier distribución

$$D \leqslant G \tag{23}$$

Para encontrar una cota superior para el coeficiente de Gini, examinaremos el caso opuesto, esto es, cuando dado un valor de D –y de m y del recorrido– consideramos la peor distribución posible. Este caso surge cuando, por una parte, la población con rentas $x \leqslant m$, es dividida en dos grupos uno con la mínima renta a y el otro con la máxima m y, por otra parte, la población con rentas $x \geqslant m$ es también dividida en dos subgrupos, uno con la renta máxima b y otro con la mínima del grupo m. Puesto que ésta es la peor distribución compatible con la información de que disponemos, es evidente que el índice de Gini correspondiente a esta situación será una cota superior para el valor real de G. Gráficamente, la curva de Lorenz que corresponde a la peor distribución es OACF (ver Figura 6).

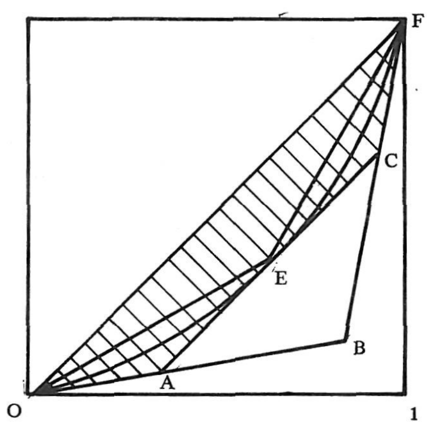

Fig. 6

Pasemos ahora al cálculo del coeficiente de Gini que corresponde a la curva de Lorenz OACF. Sabemos que

$$D = p_m - \frac{F_1(m)}{m}$$

Calculemos, en primer lugar, p_1 tal que

$$\frac{p_1 a + (p_m - p_1)m}{m} = \frac{F_1(m)}{m} = p_m - D$$

y obtenemos que

$$p_1 = \frac{m}{m-a} D$$

Por lo tanto, $L(p) = \frac{a}{m} p$, para $0 \leqslant p \leqslant p_1$, y $L(p) = p - D$ para $p_1 \leqslant p \leqslant p_m$. Calculemos ahora p_2 tal que

$$\frac{(p_2 - p_m)m + (1 - p_2) b}{m} = 1 - \frac{F_1(m)}{m} = D + (1 - p_m)$$

y obtenemos

$$p_2 = 1 - \frac{m}{b-m} D$$

En consecuencia, el índice de Gini será

$$G = 1 - 2 \left\{ \frac{a}{m} \int_0^{p_1} p\, dp + \int_{p_1}^{p_2} (p - D)\, dp + \int_{p_2}^{1} \left(\frac{b}{m} p - \frac{b-m}{m} \right) dp \right\} =$$

$$= 1 - 2 \left\{ \frac{a-m}{m} \int_0^{p_1} p\, dp + \int_0^1 p\, dp - D(p_2 - p_1) + \frac{b-m}{m} \int_{p_2}^{1} p\, dp - \right.$$

$$\left. - \frac{b-m}{m} (1 - p_2) \right\} =$$

$$= 1 - 2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{a-m}{m} \left(\frac{m}{m-a}\right)^2 D^2 + \frac{1}{2} - D \left(1 - \frac{m}{b-m} D - \frac{m}{m-a} D\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{b-m}{m} \left(2 \frac{m}{b-m} D - \left(\frac{m}{b-m}\right)^2 D^2\right) - \frac{b-m}{m} \frac{m}{b-m} D \right\} =$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2} - D + \frac{1}{2} \frac{m}{m-a} D^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{b-m} D^2\right) = 2D -$$

$$- \frac{m(b-a)}{(b-m)(m-a)} D^2 = 2D - \frac{D^2}{R^*}$$

Hemos probado, pues, el siguiente resultado.

Proposición 4.– Para toda distribución se cumple que

$$D \leqslant G \leqslant R^* \left\{ 1 - \frac{R^* - D}{R^*} \right\}^2$$

Veamos que si se cumple que $D = R^*$, entonces $G = D = R^*$. Por otra parte, si $D \neq R^*$, entonces

$$R^* \left\{ 1 - \frac{R^* - D}{R^*}^2 \right\} < R^*$$

En consecuencia, las cotas introducidas en esta Proposición son más restrictivas que las halladas por Gastwirth. En particular, cuando la función está definida sobre $[0, \infty]$, entonces

$$D \leqslant G \leqslant 1 - (1 - D)^2$$

En este caso, la cota superior es estrictamente inferior a la unidad.

La significación del resultado dependerá de la amplitud del recorrido entre las cotas inferior y superior. Es facil comprobar que la amplitud máxima corresponde al caso en el que $D = R^*/2$ siendo entonces la amplitud de $R^*/4$. Teniendo en centa que $R^* \leqslant 1$, obtendremos que la amplitud entre las cotas es, en todo caso, inferior a 0,25.

Podemos tratar ahora el último aspecto relativo al coeficiente de Gini y que hace referencia a su eventual compatibilidad en relación con las Funciones de Bienestar Social. En efecto, Atkinson (1970) mostró claramente que en las diversas medidas de desigualdad subyacen criterios éticos y que, por lo tanto, habría que evitar incompatibilidades entre éstos y los criterios éticos contenidos en las funciones de decisión social, o Funciones de Bienestar Social. A este respecto, Newbery (1970) ha probado que el coeficiente de Gini no es compatible con Funciones de Bienestar Social del tipo Benthamista (suma de utilidades individuales) cuando las funciones individuales de utilidad son estrictamente cóncavas. Este resultado ha llevado a investigar[5] qué tipo de preferencias sociales serían compatibles con el coeficiente de Gini.

En primer lugar, probaremos una generalización del resultado de Newbery (1970).

Diremos que una distribución $H(x)$ puede ser obtenida "promediando" las rentas de dos distribuciones $F(x)$ y $J(x)$ si

$$H^{-1}(p) = \lambda F^{-1}(p) + (1-\lambda) J^{-1}(x), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1 \tag{24}$$

Dividiendo por m, integrando con respecto a p y teniendo en cuenta que $L(0) = 0$, obtenemos,

$$L_H(p) = \lambda L_F(p) + (1-\lambda) L_J(p), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1 \tag{25}$$

y, por lo tanto,

$$D_H(p) = \lambda D_F(p) + (1-\lambda) D_J(p), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

En consecuencia, (24) implica que las curvas de Lorenz correspondientes pueden ser obtenidas "promediando" las curvas de Lorenz asociadas con $F(x)$ y $J(x)$. De ahí, es fácil derivar el siguiente Lemma.

Lemma 9.– Sean G_F y G_J los coeficientes de Gini asociados a las distribuciones $F(x)$ y $J(x)$, tales que $m_F = m_J$. Entonces, para cualquier distribución $H(x)$ que satisfaga (24), se cumplirá que

$$G_H = \lambda G_F + (1-\lambda) G_J, \quad \text{para todo } \lambda, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Introduzcamos ahora la definición de quasi-concavidad estricta.

Definición 1.– (Quasi-concavidad Estricta). Una función de Bienestar Social será estrictamente quasi-cóncava si para cualesquiera tres

5. Véase SHESHINSKI (1972), KATS (1972), DASGUPTA, SEN y STARRETT (1973) y ROTHSCHILD y STIGLITZ (1973).

distribuciones $F(x)$, $J(x)$ y $H(x)$, tales que $m_F = m_J$ y $W_F = W_J$ y que cumplan la condición (24) se cumple que

$$W_H > W_F = W_J \quad \text{para todo } \lambda, \qquad 0 < \lambda < 1$$

La generalización del resultado de Newbery es la siguiente.

Proposición 5.— Noy hay ninguna Función de Bienestar Social estrictamente quasi-cóncava para la cual exista una función $M(\ )$, con $M_1 > 0$ y $M_2 < 0$, tal que

$$W_H = M(m_H, G_H)$$

Prueba.— Consderemos dos distribuciones $F(x)$ y $J(x)$ tales que $m_F = m_J$ y $G_F = G_J$. Para cualquier $H(x)$ que satisfaga (24) tendremos que $m_F = m_J = m_H$ y, por el Lemma 9, $G_F = G_J = G_H$. En consecuencia, $W_H = M(m_H, G_H) = W_F = W_J$, lo cual contradice la definición de quasi-concavidad estricta.

Para evitar esta incompatbilidad, definamos la siguiente familia de medidas de desigualdad,

$$I = u^{-1}\left\{\int_0^1 u(D(p))\, dp\right\} \tag{26}$$

Sea $u(\ )$ una función monótona creciente. Sabemos que la curva de Lorenz y la discrepancia $D(p)$ son independientes respecto a transformaciones de escala. Por lo tanto, I también será independiente. Además, es fácil comprobar que I alcanza su valor mínimo – de hecho es igual a cero– cuando la renta se distribuye igualitariamente entre los indivíduos.

Es evidente que I satisface el principio de las transferencias de Dalton. A este respecto, Atkinson (1970) ha probado que este principio es equivalente a exigir que el índice de desigualdad no contradiga el orden dado por la dominancia de las curvas de Lorenz respectivas.

El punto crucial es examinar bajo qué condiciones podemos escribir

$$W_H = M(m_H, I_H)$$

para Funciones de Bienestar Social estrictamente quasi-cóncavas. Esto equivale a preguntarse bajo qué condiciones I es una función estrictamente quasi-convexa. Para el tipo de función definida en (26), la condición necesaria y suficiente es que u( ) sea una función estrictamente convexa, puesto que en este caso,

$$I_H < \lambda I_F + (1-\lambda) I_J \qquad 0 < \lambda < 1$$

para toda función que satisfaga la condición (24).

La definición general (26) no es muy operativa. Por ello, parece conveniente restringirse a una clase de funciones definidas por un sólo parámetro,

$$I(\epsilon) = \left\{ \int_0^1 D(p)^\epsilon \, dp \right\}^{1/\epsilon} \tag{27}$$

En este caso, la convexidad estricta de u( ) equivale a exigir que $\epsilon > 1$.

En esta sección hemos presentado diversas interpretaciones del coeficiente de Gini. Además, ha sido probado que cuando sólo se dispone de algunos índices de dispersión es posible establecer cotas significativas al valor del coeficiente de Gini. Por último, hemos demostrado que el uso de dicho coeficiente no es compatible con Funciones de Bienestar Social estrictamente quasi-cóncavas. Para resolver esta incompatibilidad hemos definido una generalización del coeficiente de Gini que bajo una especificación adecuada permite evitar el problema.

3. COMPARACION DE CURVAS DE LORENZ

En las secciones anteriores hemos analizado algunas propiedades de la curva de Lorenz correspondiente a una distribución, y su relación con el Coeficiente de Gini. En esta última sección examinaremos las implicaciones que pueden derivarse de la comparación de dos curvas de Lorenz. En la primera parte se expondrán algunos resultados relativos a la interpretación del hecho de que dos Curvas de Lorenz no se corten. En la segunda parte, estudiaremos cómo determinar si dos Curvas de Lorenz se cortan o no y, en particular, cómo mediante la comparación de algunos índices de dispersión es posible establecer que dos curvas se cortan.

En general, se dice que la distribución $F(x)$ "domina" a la distribución $J(x)$ cuando se cumple

$$L_F(p) \geqslant L_J(p) \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

con desigualdad estricta para algún p.

Así pues, cuando dos curvas de Lorenz no se cortan, una distribución "domina" a la otra. Esta relación de dominación da lugar a un orden incompleto, que no incluye todas aquellas distribuciones cuyas curvas de Lorenz se cortan. A la vista de la definición de la curva de Lorenz, es evidente que si la distribución F(x) domina a J(x), la distribución de la renta es menos desigual en F(x) que en J(x). Sin embargo, es necesario hacer más preciso qué entendemos por "menos desigual".

Un resultado debido a Atkinson (1970) –veáse también Rothschild y Stiglitz (1970)– permite una interpretación intuitiva de la "dominación" entre dos curvas de Lorenz. Este resultado (que no vamos a probar) puede enunciarse del siguiente modo: sea una distribución F(x) que "domina" a la distribución J(x), entonces es posible obtener la distribución F(x) a partir de la distribución J(x) mediante una secuencia de transferencias de renta de ricos a pobres.

Hasta ahora nos hemos venido refiriendo a términos como dispersión de rentas o desigualdad. Sin embargo, este tipo de criterios sólo constituyen una base para las decisiones sociales en casos excepcionales. Por lo general, la Economía del Bienestar supone que dichas decisiones se toman de acuerdo con un criterio de deseabilidad social que nos permite ordenar las distintas asignaciones (de renta) posibles. El principal problema que surge con este enfoque es que tan sólo existe acuerdo sobre algunas de las propiedades que dicho criterio debería satisfacer y, en cualquier caso, parece problemático establecer un mecanismo que permita la construcción de Funciones de Bienestar Social de forma satisfactoria.

Uno de los caminos seguidos para superar estas dificultades ha sido la construcción de indicadores de bienestar. En particular, existe una abundante literatura sobre la utilización de la Renta Nacional como indicador del Bienestar Social. Ahora bien, en general, el uso exclusivo de este indicador no nos permitirá inferir si ha tenido lugar un aumento o un descenso en el Bienestar Social. Necesitaríamos complementarlo con otros indicadores, como el del grado de desigualdad con que esta renta se distribuye entre los individuos, por ejemplo. Pero, en este caso, deberíamos escoger un indicador de desigualdad que sea compatible con la Función de Bienestar Social (o familia de Funciones) que pretendemos representar.

Supongamos que la Función Social debe satisfacer las siguientes propiedades:

i) definida sobre las rentas individuales;

ii) anonimidad, esto es, los individuos son considerados iguales en todo, excepto en su renta;

iii) separabilidad aditiva, es decir, la cantidad en la que hay que aumentar la renta del j-ésimo indivíduo para que la disminución en una unidad de la renta del i-ésimo indivíduo no altere el nivel de bienestar social, es independiente del nivel de renta de los demás indivíduos;

iv) Cuasi concavidad.

Bajo estas condiciones, la función de bienestar Social puede representarse por

$$W = \int_a^b u(x)\, f(x)\, dx$$

donde $u(\ )$ puede ser cualquier función creciente y cóncava. Puesto que nos vamos a referir a distribuciones con la misma renta total, podemos reescribir esta Función de Bienestar Social en términos de las variables que definen la curva de Lorenz

$$W = \int_0^1 u(F^{-1}(p))\, dp \tag{28}$$

Podemos presentar ahora la siguiente Proposición.

Proposición 6.– (Atkinson (1970)[6]) sean dos distribuciones $F(x)$ y $J(x)$ con la misma renta media. Entonces,

$$W_F = \int_0^1 u(F^{-1}(p))\, dp \geqslant \int_0^1 u(J^{-1}(p))\, dp = W_J$$

para toda función cóncava $u(\ )$, si y sólo si

$$L_F(p) \geqslant L_J(p), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

Prueba.– Suficiencia:

$$W_F - W_J = \int_0^1 [u(F^{-1}(p)) - u(J^{-1}(p))]\, dp \geqslant \text{(por concavidad)}$$

6. El método de prueba y la presentación de la proposición son originales.

$$\geqslant m \int_0^1 u'(F^{-1}(p)) \quad \frac{F^{-1}(p)}{m} - \frac{J^{-1}(p)}{m} \quad dp =$$

$$= m \int_0^1 u'(F^{-1}(p))\,(L'_F(p) - L'_J(p))\,dp =$$

$$= - m \int_0^1 \frac{u''(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))} \quad (L_F(p) - L_J(p))\,dp$$

Dada la concavidad de $u(\ )$, $L_F(p) \geqslant L_J(p)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, es suficiente para $W_F \geqslant W_J$.

Necesidad: Por concavidad de la función $u(\ )$, y siguiendo los mismos pasos podemos llegar a la siguiente desigualdad

$$W_F - W_J \leqslant - m \int_0^1 \frac{u''(J^{-1}(p))}{j(J^{-1}(p))} \; (L_F(p) - L_J(p))\,dp$$

Supongamos que para $]p_1, p_2[$, $L_F(p) < L_J(p)$. Definamos una función $u(\ )$ tal que $u''(J^{-1}(p)) < 0$ para $p_1 < p < p_2$ y $u''(J^{-1}(p)) = 0$ para cualquier otro valor de p. En este caso, $W_F < W_J$, en contradicción con el enunciado de la Proposición. Esto completa la prueba.

La implicación de la Proposición 6 es que la dominación de curvas de Lorenz será un indicador de bienestar (complementario con la renta total) para cualquier Función de Bienestar Social que pertenezca a la familia de funciones definida por (28). Este resultado puede ser susceptible de otras interesantes interpretaciones. Supongamos que desconocemos la forma específica de la Función de Bienestar Social, pero sabemos que debe cumplir las anteriores condiciones i), ii), iii) y iv). Si observamos una distribución $F(x)$ que domina a otra distribución $J(x)$, podemos afirmar que la primera es socialmente preferida a la segunda, cualquiera que sea la forma específica de la Función de Bienestar Social.

Las propiedades que acabamos de examinar confieren un indudable interés a las curvas de Lorenz como representación de la dispersión de la distribución de la renta. Pasaremos ahora a examinar el segundo grupo de problemas que se incluyen en esta sección, esto es, cómo determinar si dos curvas de Lorenz se cortan o no.

El resultado fundamental para la comparación de curvas de Lorenz se debe también a Atkinson (1970), y hace referencia a la condición necesaria y suficiente para que una distribución domine a otra. El resultado puede enunciarse del siguiente modo: la condición necesaria y suficiente para que $L_F(p) \geqslant L_J(p)$, $0 \geqslant p \geqslant 1$, es que

$$\int_a^x (F(y) - J(y))\, dy \leqslant 0, \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

y $F(y) \neq J(y)$ para algún valor de y.

En el siguiente Lemma presentamos una condición suficiente para la dominación (por lo tanto, es una condición menos potente que la de Atkinson que, además, es necesaria).

Lemma 10.– Una condición suficiente para que $L_F(p) \geqslant L_J(p)$, $0 \geqslant p \geqslant 1$, es que se cumpla

$$p(L'_F(p) - L'_J(p)) - (L_F(p) - L_J(p)) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

y con signo estricto para algún valor de p.

Prueba.– Probaremos la suficiencia de esta condición por vía de contradicción. En efecto, supongamos que

$$p(L'_F(p) - L'_J(p)) - (L_F(p) - L_J(p)) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1 \qquad (29)$$

pero que $L_F(p) < L_H(p)$, para $]p_1, p_2[$, y $L_F(p_1) = L_J(p_1)$, $L_F(p_2) =$ $= L_J(p_2)$. En este caso, $L_F(p) - L_J(p) = N(p)$ cumple las siguientes condiciones:

i) $N(p_1) = 0$;

ii) $N'(p) < 0$, $p_1 < p < p_2$. Pero entonces no puede cumplirse que $N(p_2) = 0$, tal como suponíamos. Obsérvese que el caso $p_1 = 0$ y $p_2 = 1$ se acomoda perfectamente a nuestra prueba.

Si utilizamos la definición de elasticidad de la curva de Lorenz introducida en (9), podemos reescribir (29)

$$L_F(p)(\sigma_F - 1) - L_J(p)(\sigma_J - 1) \leqslant 0 \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1 \qquad (30)$$

Para funciones de elasticidad constante y utilizando la Proposición 1, obtenemos que si se cumple la condición (29)

$$\eta_F > \eta_J$$

donde η es la elasticidad de la función de densidad correspondiente.

Una de las principales complicaciones que surgen en la aplicación del criterio de dominación es que la verificación del criterio de Atkinson o de la condición (29) requiere una gran cantidad de información que, posiblemente, no estará a disposición del investigador. Por lo tanto, parece interesante investigar bajo qué condiciones podemos establecer la existencia de dominación entre dos curvas de Lorenz con información limitada. Los resultados que se presentan a continuación pretenden establecer condiciones suficientes para la intersección de dos curvas de Lorenz. En concreto, supondremos que la información disponible se reduce al valor de algunos índices de dispersión.

Supongamos que conocemos los siguientes elementos:

- los intervalos de definición, $[a_F, b_F]$ y $[a_J, b_J]$;
- la media, que supondremos igual para ambas distribuciones;
- la Diferencia Media Relativa (22);
- el coeficiente de Gini (15), y
- el (cuadrado del) coeficiente de variación, V, esto es

$$V^2 = \int_a^b (x/m - 1)^2 f(x)\, dx$$

Con esta información podemos calcular también:

- el Recorrido Relativo, $R = (b - a)/m$;
- el índice R^*, tal como ha sido definido en (21);
- el índice M –véase Proposición 13–,

$$M = 2D - (D^2/R^*)$$

Probaremos ahora una serie de Lemmas (muchos de ellos ya conocidos), que nos permitirán introducir después el resultado principal.

Lemma 11.– Sea $a_F > a_J$. Entonces, $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba.– Sabemos que $L_F(0) = L_J(0)$. Consideremos la función $N(p) = L_F(p) - L_J(p)$. Es inmediato que $N(0) = 0$. Si Lim $N'(p) < 0$, $p \to 0$, para algún $\epsilon > 0$, $N(\epsilon) > 0$, esto es $L_F(\epsilon) > L_J(\epsilon)$. En efecto, $N'(p) = (F^{-1}(p))/m - (J^{-1}(p))/m$ y en consecuencia, $a_F > a_J$ implica que $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Lemma 12.– Sea $b_J > b_F$. Entonces $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba.– El resultado se sigue del mismo argumento utilizado en el anterior Lemma cuando $p \to 1$.

Lemma 13.– Sea $R_J > R_F$. Entonces $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba.– $R_J > R_F$ implica que $b_J - a_J > b_F - a_F$, esto es, $a_F - a_J > b_F - b_J$. Si $b_F \geqslant b_J$, entonces $a_F > a_J$ y se aplica el Lemma 1. Si $b_F < b_J$, se aplica el Lemma 2.

Lemma 14.– Sea $R^*_J > R^*_F$. Entonces $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba.– Operando es fácil obtener que $R^*_J > R^*_F$ implica que

$$\frac{a_F - a_J}{(m - a_F)(m - a_J)} > \frac{b_F - b_J}{(b_F - m)(b_J - m)}$$

Si $a_F > a_J$, se aplica el Lemma 1. Si $a_F \leqslant a_J$, entonces $b_F < b_J$ y se aplica el Lemma 2.

Lemma 15.– Sea $D_J > D_F$. Entonces $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba.– Utilizando la definición de Diferencia Media Relativa (22) y la Proposición 5, podemos escribir,

$$D_F = p^F_m - L_F(p^F_m) \geqslant p - L_F(p)$$

para todo p, y en particular, para $p = p^J_m$ tenemos que

$$D_F \geqslant p^J_m - L_F(p^J_m)$$

Puesto que $D_J > D_F$, podemos escribir

$$D_J = p^J_m - L_J(p^J_m) > D_F \geqslant p^J_m - L_F(p^J_m)$$

esto es, $L_F(p_m^J) > L_J(p_m^J)$. En consecuencia $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Lemma 16.– Sea $M_J > M_F$. Entonces, $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba.– $M_J > M_F$ implica que

$$2D_J - (D_J^2/R_J^*) > 2D_F - (D_F^2/R_F^*)$$

Si $D_J > D_F$, se aplica el Lemma 5. Supongamos que $D_J \leqslant D_F$. Observemos que el índice M es una función creciente de D, cuando $0 \leqslant D \leqslant 1$. Por lo tanto,

$$2D_F - (D_F^2/R_J^*) \geqslant M_H > M_F = 2D_F - (D_F^2/R_F^*)$$

y, por lo tanto, $R_J^* > R_F^*$ y se aplica el Lemma 4.

Lemma 17.– Sea $V_J^2 > V_F^2$. Entonces $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba,– Supongamos que $J(x)$ domina a $F(x)$, esto es,

$$p - L_J(p) = D_J(p) \leqslant D_F(p) = p - L_F(p), \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

Realizando un cambio de variables en la expresión general del (cuadrado del) coeficiente de variación, obtenemos,

$$V_F^2 = \int_0^1 \left(\frac{F^{-1}(p)}{m_F} - 1\right)^2 dp = \int_0^1 D_F'(p)^2 \, dp$$

Integrando por partes,

$$V_F^2 = - \int_0^1 D_F''(p)\, D_F(p)\, dp, \qquad \text{donde } D_F''(p) < 0$$

Por lo tanto,

$$V_J^2 - V_F^2 = \int_0^1 \left\{ D_F''(p)\, D_F(p) - D_J''(p)\, D_J(p) \right\} dp$$

Por la hipótesis de que $J(x)$ domina a $F(x)$, tenemos

$$V_J^2 - V_F^2 \leqslant \int_0^1 \left\{ D_F''(p) - D_J''(p) \right\} D_F(p)\, dp$$

Integrando por partes dos veces obtenemos

$$V_J^2 - V_F^2 \leqslant - \int_0^1 \left\{ D_J(p) - D_F(p) \right\} D_F''(p)\, dp$$

Teniendo en cuenta que $J(x)$ domina a $F(x)$, tenemos que

$$V_J^2 < V_F^2$$

En consecuencia, si $V_J^2 > V_F^2$, no puede ser cierto que $J(x)$ domine a $F(x)$, tal como queríamos demostrar.

Lemma 18.– Sea $G_J > G_F$. Entonces $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$.

Prueba.– $G_J > G_F$ implica que

$$\int_0^1 (L_F(p) - L_J(p))\, dp > 0$$

Por lo tanto, no puede ser que $L_J(p) \geqslant L_F(p)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Combinando cualquier par de los Lemmas anteriores podemos encontrar condiciones suficientes para la intersección de las curvas de Lorenz correspondientes a las distribuciones $F(x)$ y $J(x)$. Consideremos, como ejemplo, el caso en que $R_F^* > R_J^*$ y $D_J > D_F$. Por el Lemma 4 sabemos que $F(x)$ no puede dominar a $J(x)$ y por el Lemma 5 que $J(x)$ no puede dominar a $F(x)$. Por lo tanto, las curvas de Lorenz de $F(x)$ y $J(x)$ deben cortarse. En la siguiente proposición presentamos la lista de condiciones suficientes alternativas para la intersección de las curvas de Lorenz correspondientes a las distribuciones $F(x)$ y $J(x)$.

Proposición 7.– Sean $F(x)$ y $J(x)$ dos distribuciones con igual media y definidas en $[a_F, b_F]$ y $[a_J, b_J]$, respectivamente, y sean $L_F(p)$ y $L_J(p)$ las curvas de Lorenz correspondientes. Entonces, cualquiera de las siguientes condiciones[8] es suficiente para la intersección de $L_F(p)$ y $L_J(p)$

i)	$a_F > a_J$	y	$b_F > b_J$
ii)	$a_F > a_J$	y	$D_F > D_J$
iii)	$a_F > a_J$	y	$M_F > M_J$
iv)	$a_F > a_J$	y	$V_F^2 > V_J^2$
v)	$a_F > a_J$	y	$G_F > G_J$
vi)	$b_J > b_F$	y	$D_F > D_J$
vii)	$b_J > b_F$	y	$M_F > M_J$
viii)	$b_J > b_F$	y	$V_F^2 > V_J^2$
ix)	$b_J > b_F$	y	$G_F > G_J$
x)	$R_J > R_F$	y	$R_F^* > R_J^*$
xi)	$R_J > R_F$	y	$D_F > D_J$
xii)	$R_J > R_F$	y	$M_F > M_J$
xiii)	$R_J > R_F$	y	$V_F^2 > V_J^2$
xiv)	$R_J > R_F$	y	$G_F > G_J$
xv)	$R_J^* > R_F^*$	y	$D_F > D_J$
xvi)	$R_J^* > R_F^*$	y	$V_F^2 > V_J^2$
xvii)	$R_J^* > R_F^*$	y	$G_F > G_J$
xviii)	$D_J > D_F$	y	$V_F^2 > V_J^2$
xix)	$D_J > D_F$	y	$G_F > G_J$
xx)	$M_J > M_F$	y	$V_F^2 > V_J^2$
xxi)	$M_J > M_F$	y	$G_F > G_J$
xxii)	$V_J^2 > V_F^2$	y	$G_F > G_J$

Mediante las condiciones introducidas en esta proposición podremos establecer la intersección de curvas de Lorenz con muy escasa información.

Para terminar, quisiéramos destacar una interpretación adicional del anterior resultado. Desde el trabajo de Dalton (1920), por lo menos, está solidamente establecido que no es aconsejable realizar comparaciones de desigualdad en base a un sólo índice de dispersión. Se ha

8. Los casos redundantes han sido eliminados. Por jemplo, $a_F > a_J$ y $R_F > R_J$ es redundante respecto al caso $a_F > a_J$ y $b_F > b_J$.

venido argumentando que para un análisis riguroso habría que comparar todos los índices de dispersión disponibles y que sólo en los casos en los que todos los índices nos indicaran menor dispersión podríamos afirmar sin ambiguedad que una distribución presenta menos desigualdad que la otra. La Proposición 18 nos permite dar mayor precisión a esta afirmación. En efecto, cuando los diversos índices de dispersión nos dan indicaciones contrarias, podemos afirmar que las curvas de Lorenz de las distribuciones correspondientes se cortan. Y en este caso, los resultados presentados al comienzo de esta sección nos indican claramente que la ordenación de estas dos distribuciones, tanto en términos de bienestar, como de grado de desigualdad, ha de ser necesariamente ambigua.

4. CONCLUSIONES

En la primera sección hemos examinado la relación existente entre curvas de Lorenz y las funciones de distribución subyacentes. En concreto, hemos probado que las propiedades de simetría e isoelasticidad se transmiten de unas a otras. Sin embargo, estos casos no son muy relevantes para análisis espíricos. En efecto, por una parte, sabemos que la distribución de la renta acostumbra a presentar una notable asimetría y, por otra, las únicas funciones de distribución de elasticidad constante son las de Pareto, que sólo ofrecen un buen ajuste para la cola superior de las distribuciones. En consecuencia, parece deseable proseguir la investigación considerando aquellas propiedades que una distribución de la renta puede tener.

Quisiéramos destacar una reflexión que surge de los resultados de la primera sección. En los trabajos empíricos acostumbramos a hacer una doble interpolación. Por una parte, ajustamos una función contínua de distribución a unos datos que nos vienen suministrados en tramos discretos. Por otra parte, trazamos una curva de Lorenz contínua que pretende unir un cierto número de puntos que nos proporciona la información de base. La cuestión esencial es que ambas interpolaciones no pueden hacerse independientemente.

En la segunda sección, dedicada al coeficiente de Gini, hemos examinado la posibilidad de acotar el valor de dicho coeficiente. Para ello hemos utilizado el Recorrido Relativo y la Diferencia Media Relativa. Ahora bien, la utilización de estos dos índices presenta algunas dificultades. Para conocer el Recorrido Relativo sería preciso examinar la totalidad de la población. En este sentido, la utilización de dicho índice no parece tener gran relevancia práctica. Ello no invalida, sin embargo, los resultados de esta sección ya que con la Diferencia Media Relativa podemos establecer cotas significativas al valor del coeficiente de Gini.

La dificultad en este caso radica en que habitualmente no poseemos información sobre la Diferencia Media Relativa de las distribuciones de renta. Así pues, sería de interés investigar la utilización de la Varianza para establecer estas cotas, puesto que la información sobre el segundo momento de la distribución de la renta es más frecuente.

También en la segunda sección hemos propuesto una generalización del coeficiente de Gini que permite superar algunos de los problemas que presenta dicho coeficiente. En su versión más operativa, esta generalización incorpora un nuevo parámetro, ϵ, que no hemos interpretado. Parece, pues, de interés examinar las implicaciones éticas de escoger un valor determinado para dicho parámetro. Asímismo, habría que estudiar qué familia de Funciones de Bienestar Social se corresponde con la versión simplificada del coeficiente de Gini generalizado.

En la tercera sección se discuten las implicaciones que pueden deducirse de la comparación de curvas de Lorenz. La interpretación del criterio de "dominación" en términos de Funciones de Bienestar Social puede ser perfeccionado. Desgupta y otros (1973), para el caso de poblaciones finitas, han demostrado que la condición necesaria y suficiente para que el orden por dominación coincida con las preferencias sociales es que las Funciones de Bienestar Social sean S-cóncavas. Ahora bien, esta condición de S-concavidad no ha sido aún trasladada al caso de poblaciones infinitas, esto es, de distribuciones contínuas. Otro campo de interés sería el estudio de las implicaciones de la comparación de curvas de Lorenz es que sólo las diferencias relativas de renta importan, sea cual sea el nivel absoluto de renta en el que tienen lugar.

Por último, hemos examinado la posibilidad de establecer cuándo dos curvas de Lorenz se cortan, mediante el uso de algunos coeficientes de dispersión. Un problema quizás más interesante es establecer cuándo existe dominación de una sobre otra. A este respecto, podemos dar un ejemplo de condiciones suficientes para que $F(x)$ domine a $J(x)$; esto es, cuando

$$a_F/m > 1 - D_J/P^J_m \qquad \text{y} \qquad b_F/m < 1 + D_J/1 - p^J_m$$

Esta condición también puede escribirse como

$$a_F > J_1(m)/p^J_m \qquad \text{y} \qquad b_F < m - J_1(m)/1 - p^J_m$$

Esto es, cuando la renta mínima en $F(x)$ es mayor que la media de la renta de los indivíduos con rentas inferiores a m en $J(x)$ y la renta máxima en $F(x)$ es menor que la media de la renta de los indivíduos con rentas superiores a m en $J(x)$.

REFERENCIAS

AITCHISON, J. y J.A.C. BROWN (1954): "On Criteria for Descriptions of Income Distribution", *Metroeconomica,* vol. 6, pp. 88-107.

ATKINSON, A.B. (1970): "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory,* vol. 2, pp. 244-263.

DALTON, H. (1920): "The Measurement of the Inequality of Incomes", *Economic Journal,* vol. 30, pp. 348-361.

DASGUPTA, P., A. SEN y D. STARRETT (1973): "Notes on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory,* vol. 6, pp. 180-187.

ESTEBAN, J. (1976): *A General Density Function for the Distribution of Income,* W.P. 13.76, Departament de Teoria Econòmica, Univ. Autònoma de Barcelona.

FELLMAN, J. (1976): "The Effect of Transformations on Lorenz Curves", *Econometrica,* vol. 44, pp. 823-824.

GASTWIRTH, J.L. (1971): "A General Definition of the Lorenz Curve", *Econometrica,* vol. 39, pp. 1.037-1.039.

GASTWIRTH, J.L. (1972): "The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", *Review of Economics and Statistics,* vol. 54, pp. 306-316.

KATS, A. (1972): "On the Social Welfare Function and the Parameters of Income Distribution", *Journal of Economic Theory,* vol. 5, pp. 377-382.

KENDALL, M.G. y STUART, A. (1963): *The Advanced Theory of Statistics. Vol. I. Distribution Theory,* C. Griffin, London.

KONDOR, Y. (1971): "An Old-New Measure of Income Inequality", *Econometrica,* vol. 39, pp. 1.041-1.042.

LORENZ, M.C. (1905): "Methods of Measuring the Concentration of Wealth", *Publications of the American Statistical Association,* vol. 9, pp. 209-219.

MEHRAN, F. (1976): "Linear Measures of Income Inequality", *Econometrica,* vol. 44, pp. 805-809.

NEWBERY, D. (1970): "A Theorem on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory,* vol. 2, pp. 264-266.

ROTHSCHILD, M. y STIGLITZ, J.E. (1970): "Increasing Risk: I. A Definition", *Journal of Economic Theory,* vol. 16, pp. 188-204.

SEN, A. (1973): *On Economic Inequality,* Oxford University Press, London.

SHESHINSKI, E. (1972): "Relation Between a Social Welfare Function and the Gini Index of Income Inequality, *Journal of Economic Theory,* vol. 4, pp. 98-100.